Поговорим про математическую постановку задачи на функцию Грина.

$$\Delta u(M) = \rho(M)$$

Давайте переложим принцип суперпозиции на язык математики. А именно, любую функцию-неоднородность можно разложить по дельта-функциям:

$$\rho(M) = \iiint \rho(M,N)\,\delta(\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M})d^3V_N$$

Пусть мы нашли решение вот такой задачи:

$$\Delta u_N(M) = \delta(\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M})$$

Тогда, пользуясь линейностью лапласиана, решение

$$u(M) = \iiint u_N(M)\,\rho(M,N)$$

Будет удовлетворять уравнению Пуассона:

$$\Delta u(M) = \rho(M)$$

$$u_N(M) - \text{ это и есть } G(M,N)$$

Таким образом, математическая постановка задачи на функцию Грина содержит дельта-функцию.

И она бесполезна. Стоп, что?

Функция Грина состоит из двух частей: я их называю главной (она же операторная) и граничная.

$$G = \frac{1}{r_{NM}} + \text{граничная часть}$$

(на 4π я буду забивать)

Главная, операторная часть определяется диффенциальным оператором. Если это оператор Лапласа, то она вида $\frac{1}{r_{NM}}$. Позже на ММФ вы будете решать уравнение Гельмгольца. Если оно вида

$$\Delta u + k^2 u + F = 0$$

с дифференциальным оператором $\Delta u + k^2 u$, то операторная часть функции Грина будет

$$\frac{e^{ikr_{NM}}}{r_{NM}}$$

А у вот такого уравнения Гельмгольца $\Delta u - \varkappa^2 u + f = 0$ операторная часть

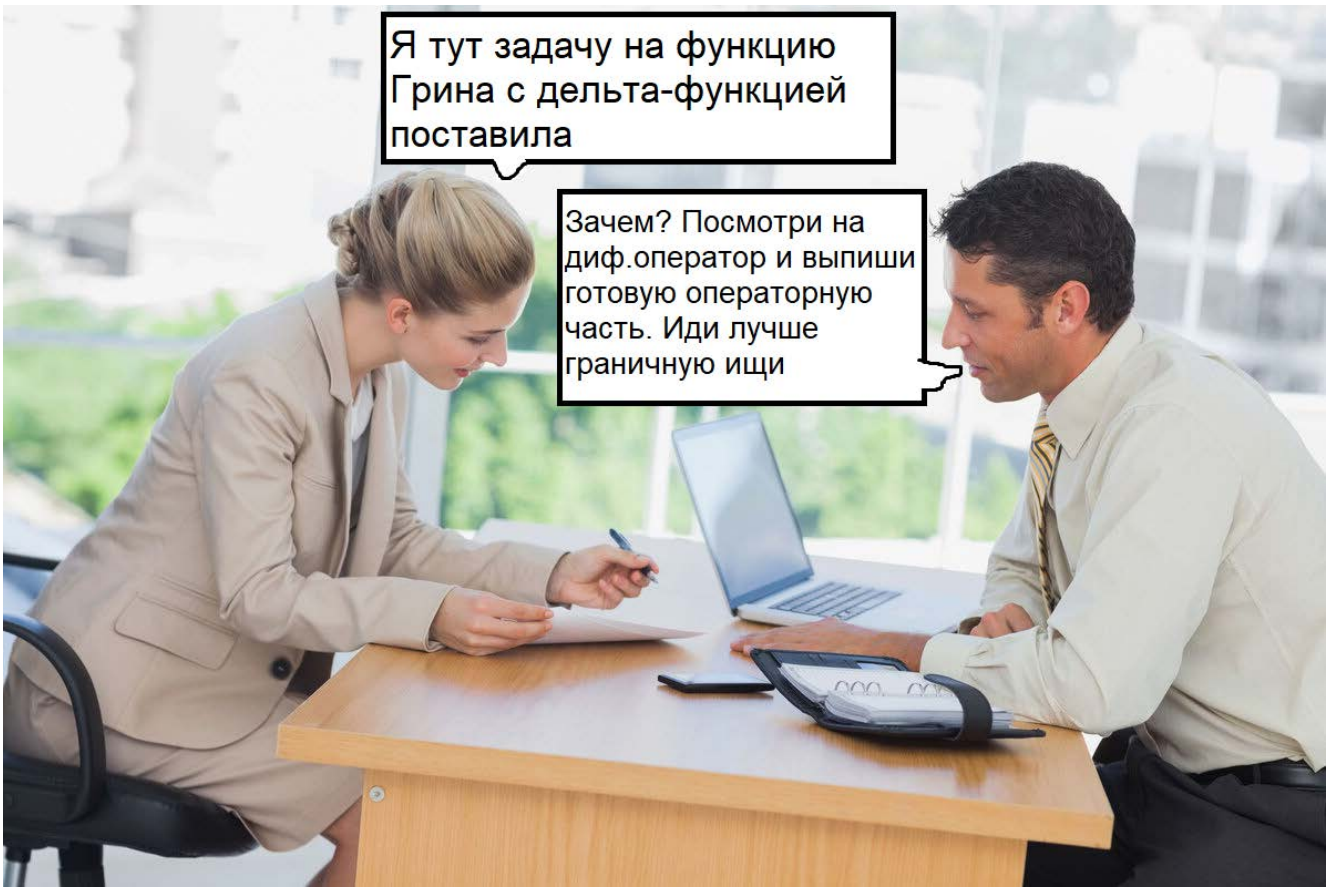
$$\frac{e^{-æ r_{NM}}}{r_{NM}}$$

Граничная определяется граничными условиями. Если ГУ простецкие:

$$u(\infty) = 0$$

то она и вовсе 0. Если не простецкие, то надо думать. (На семинарах по ММФ вы будете искать именно граничную!!! часть)

Подытожим сказанное в виде мема:

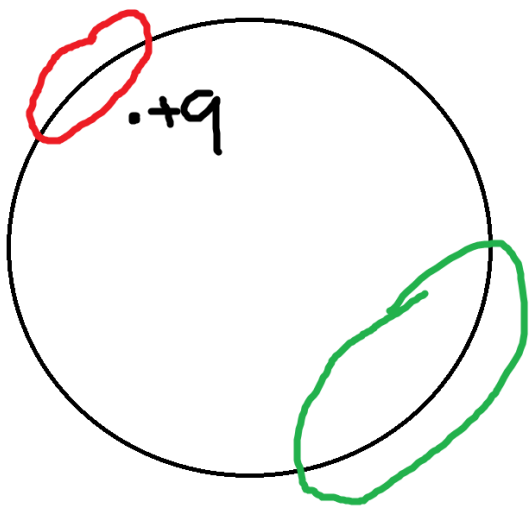


Почему так? Да потому что любую задачу на поиск функции Грина в любой области нужно начинать с выписывания главной части: $G = \frac{1}{r_{NM}} + \cdots$. Если мы подставим её в задачу для функции Грина, которую даёт кафмат

$$\begin{cases} \Delta u_N(M) = \delta(\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M}) \\ \text{ГУ} \end{cases}$$

То операторная часть $\frac{1}{r_{NM}}$ как раз возьмёт на себя всю однородность, ничего от неё не оставив.

Это важная идея! Вернёмся к прошлой задаче, задаче №1:

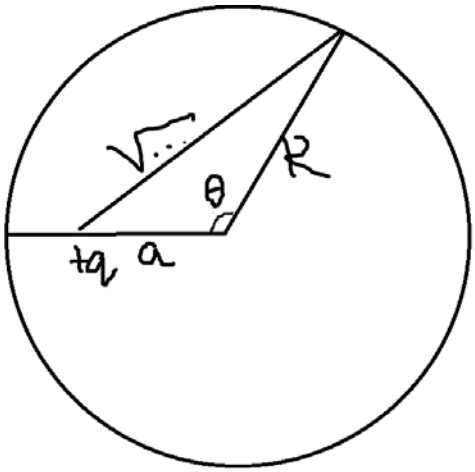


Давайте предположим, что

$$u(M) = \frac{1}{r_{\text{до заряда}}} + v(M)$$

Где $v(M)$ - «расстройка» $\frac{1}{r_{\text{до заряда}}}$, призванная «пофиксить» её грех в виде неравенства на сфере.

Удобно перейти в сферическую СК, направив ось z по направлению к заряду. Тогда, если заряд расположен на расстоянии a от радиуса, по теореме косинусов



на сфере имеем

$$u(M) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}} + v(M)$$

Положим потенциал на сфере равным 0, тогда

$$v(M) = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}}$$

Ответ: в любой точке ВНУТРИ шара, включая сферу, равен

$$u = \frac{1}{r_{\text{до заряда}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}}$$

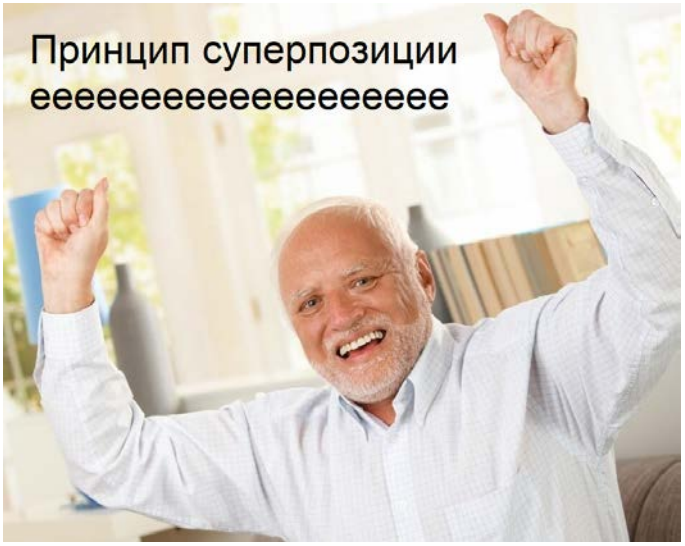
На сфере он 0, внутри какой-то там (но это неваааааажно, главное, что на сфере 0).

Задача 2. Внутри металлической сферы радиусом R запихнули вещество с диэлектрической проницаемостью ε=1 (для простоты) и объёмной плотностью зарядов:

$$\rho(r,\theta,\varphi) = (r^5 + J_1(r) * e^{-165r}) * \cos^7\theta * \sin^2 18\varphi$$

Найти поле в этом шаре. Ответ записать через интеграл.

Уф, глядя на плотность заряда, так и хочется совершить то, за что Вк банит (если что, осуждаем, берегите свою жизнь). Но постойте – мы уже решили задачу для точечного заряда. А у нас есть



Мгновенно пишем

$$u(M) = \iiint\limits_{\text{по шару}} G(M,N)\rho(N)dV(N)$$

где $G(M,N)$ мы уже подсчитали в прошлой задаче:

$$\frac{1}{r_{\text{до заряда}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}}$$

Ну заряд у нас в точке N будет, поэтому

$$G(M,N) = \frac{1}{r_{MN}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_N^2 - 2Rr_N * \cos\theta}}$$

определяет вклад в точке M от плотности заряда в точке N.

Ответ:

$$u(M) = \iiint\limits_{\text{по шару}} G(M,N)\rho(M,N)dV(N)$$

$$= \iiint\limits_{\text{по шару}} \left(\frac{1}{r_{MN}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_N^2 - 2Rr_N * \cos\theta}}\right)(r_N^5 + J_1(r_N) * e^{-165r_N})$$
$$* \cos^7\theta_N * \sin^2 18\varphi_N \, dV(N)$$

Это задача превосходно иллюстрирует важный принцип: функция Грина и сложность её нахождения определяется геометрией, а не неоднородностью внутри.

А вот неоднородность снаружи также может вылезти. Например, мы на поверхности сферы задали следующие ГУ (это задача №3):

$$u(M)_{\text{на границе}} = u_0 \cos\theta$$

Ну, надо на границе приравнять эту штуку

$$u(M) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}} + v(M)$$

уже не к 0, а к $r * \cos\theta$. Удобнее и «костыльную» $v(M)$ представить в виде суммы двух функций: $-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra*\cos\theta}}$ (которая обнулит эффект действия главной, операторной части $\frac{1}{r_{\text{до заряда}}}$) и дважды костыльной w(M), которая возьмёт на себя выполнение

$$w(M)_{\text{на границе}} = u_0 \cos\theta$$

При этом внутри w(M)=0. Классическая задача 3 перед нами, её решение:

$$w(M) = \frac{ru_0}{R} * \cos\theta$$

Ответ:

$$u(M) = \frac{1}{r_{\text{до заряда}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra * \cos\theta}} + \frac{ru_0}{R} * \cos\theta$$

В общем случае кафмат доказывает, что если неоднорость на границе равна f(P) и ГУ Дирихле, то добавка w(P) есть

$$\iint f(P)\frac{\partial G}{\partial n} dS_P$$

где G(M,N) – функция Грина с однородными ГУ. В предыдущей задаче эта формула не пригодилось, но иногда пригождается.

Тест!

Я предлагаю читателю проверить, насколько он усвоил материал

Вам предлагаются три задачи. Одна – гроб, а две остальные ничё так, как говорил мой одноклассник на школьной дискотеке (правда, скажи он чуть громче, ему бы потребовался бы уже гроб). Какие ничё так?

Задача 1: найти потенциал u внутри сложной фигуры – колбасы.

Внутри плотность зарядов = 0, ГУ тривиальные – Дирихле, u на границе колбасы всюду 0.

Задача 2: цилиндр , внутри объёмная плотность зарядов =1, на границе поверхностная плотность зарядов равна

$$f(r,\varphi) = J_2(r)(r-R)^4 e^{2r+\pi} * \sin\varphi$$

на донцах и 0 на боковой поверхности.

Задача 3: цилиндр , внутри объёмная плотность зарядов

$$\rho(r,\theta,\varphi) = J_2(r)(r-R)^4(r^5 + J_1(r) * e^{-165r}) * \cos^7\theta * \sin^2 18\varphi$$

на границе же – однородные ГУ 1-го рода.

Ответ на следующей странице!

Ну конечно, гроб – это задача №1! Да, нет однородностей – плевать на них, функция Грина для них и придумана – всё дело в сложной поверхности. Вы просто не найдёте аналитического выражения для функции Грина в ней.

Ещё вопрос: зачем нужна функция Грина? Перед вами 4 варианта ответа, из них 3 правильных, один нет

. Итак:

а) потому что её требует кафмат

б) она позволяет находить u(M) в простых областях при наличии внешней неоднорости (ну да Бог с ней, это задача 3 называлась и мы подобное решали) и внутренней одноростях (а вот такое уже не задача 3 и не решалось до этого)

в) она позволяет находить u(M) в сложных областях (где не решается задача 3) в явном виде

г) она позволяет записать u(M) в сложных областях в виде интеграла с функцией Грина, аналитического выражения для которой может и не быть.

Ответ снова на следующей странице!

Ответ: неправильный ответ в). Если не решается задача 3, то и функция Грина (вроде как, инфа не сотка, но контрпримеров я не знаю) в аналитическом виде.

Может возникнуть вопрос, зачем на практике нужно г):

$$u(M) = \iiint G(M,N)\,\rho(N)dV_N + \iint f(P)\frac{\partial G}{\partial n}dS_P$$

(ведь явного выражения для $G(M,N)$ в случае сложных областей нет!)

но теоретикам в теорфизике это очень полезно. См. подробнее методичку в ММФ, посвящённую оператору Грина как обратному оператору, ну и на старших курсах вы это поймёте.